BIBLID: 0354-9097, *9* (2004), 1-4, pp. 1-16

UDC: 539.194
Прегледни рад

ПСЕУДОХАРМОНИЈСКИ ОСЦИЛАТОР И ЊЕГОВА ПРИДРУЖЕНА КОХЕРЕНТНА СТАЊА

Душан Попов
University „Politehnica" of Timisoara, Department of Physics, Timisoara, Romania
E-mail: dpopov@etv.utt.ro

У раду смо извршили делимичан преглед потенцијала псеухохармонијског осцилатора (ПХО), који је прелазни потенцијал између идеалног потенцијала хармонијског осцилатора (ХО) и анхармонијских (много реалистичнијих) потенцијала, који има примене у разним гранама физике. Представили смо општи приступ конструисања кохерентних стања (КС) и указали смо на нека својства тих стања, да би изнашли тежишну функцију интеграционе мере, дијагоналне елементе оператора густине у репрезентацији миксованих (термалних) КС (Q-функција Хусимија) и, такође, P- функцију из дијагоналног разлагања оператора густине. Конструисали смо Барут-Гирарделова, Клаудер-Переломовљева и Газо-Клаудерова кохерентна стања придружена ПХО и размотрили смо нека својства тих стања, посебно израчунавши средње термалне вредности.

Кључне речи: псеудохармонијски осцилатор; кохерентна стања; оператор гиустине

1. Увод

Тродимензионални псеудохармонијски осцилатор (ПХО) појављује се по први пут у научној литератури почетком четврте деценије прошлога века (Davidson, 1932.) [1]. То је период када се у хемијским применама квантне механике интензивно трага за изналажењем аналитичких израза за потенцијалну функцију међунуклеарне интеракције у молекулима, као што су, на пример, Морзеов потенцијал (Morse, 1929.) [2], Крацеров потенцијал (Kratzer, 1920; Fues, 1929.) [3], Пешл-Телеров потенцијал (Pöschl-Teller, 1933.) [4] и.т.д.

У суштини, псеудохармонијски потенцијал састоји се од два члана: први, који је потенцијал тродимензионалног изотропног хармонијског осцилатора (ХО-3Д), дакле пропорционалан са r^2 и други, који представља центрифугалну баријеру, дакле пропорционалан са r^{-2}.

У литератури се овакав тип потенцијала може наћи и под другим називима као што су: *изотонични осцилатор* (isotonic oscillator) [5], *двочестична Калођерова интеракција* (two particle Calogero interaction) [6] или, пак, једноставно *сингуларни осцилатор* (singular oscillator) [7].

Што се нас тиче, усвојићемо назив *псеудохармонијски осцилатор* (ПХО), исто као и у радовима [8] и [9], пошто нам се то чини најсугестивнијим.

Ефективни псеудохармонијски потенцијал за решење тродимензионалног проблема Шредингерове једначине стационарних стања двоатомског молекула има облик [8]:

$$V_J(r) = \frac{m\omega^2}{8} r_0^2 \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} J(J+1) \frac{1}{r^2} \qquad (1.1)$$

где је m – редукована маса језгара молекула, ω – сопствена учестаност ПХО, r_0 – равнотежно растојање између језгара у двоатомском молекулу, а $J = 0,1,2, \ldots$ ротациони квантни број.

Иако хармонијски осцилатор (ХО) свакако има своје предности, ипак је он само један идеализовани модел, у многим погледима прилично нереалистички, поготову када се има у виду разјашњење карактеристика ротационог и осцилаторног (вибрационог) кретања језгара атома у двоатомском молекулу (а дабоме, и у полиатомском). Што се тих карактеристика тиче, могло би се рећи да је псеудохармонијски потен-

цијал у ствари прелазни потенцијал од хармонијског (идеализованог) ка анхармонијским (реалистичким) потенцијалима, па би се могао написати следећи низ:

ХО $\rightarrow$ ПХО $\rightarrow$ анхармонијски потенцијали (Морзе, Пешл-Телер, . . .)

Другим речима, како је то назначено у раду [10], ПХО се налази на самој граници између линеарности и нелинеарности.

Ова тврдња донекле оправдава интерес који, у последње време, влада за проучавање нелинеарних аспеката, као и, у том контексту, за проучавање анхармонијских потенцијала, а као посебан случај за поновно проучавање ПХО (у ту сврху види рад [11], као и литературу назначену тамо).

Са друге стране, пак, кохерентна стања (КС) придружена разним операторима Хамилтона (са физичком, али и нефизичком основом), како линеарна, тако и нелинеарна, обезбеђују један важан терен за проучавање најразличитијих физичких појава. Као последица тога, представља интерес конструисање кохерентних стања за овај потенцијал, што је и један од циљева овог рада.

У раду [11] представили смо ротациони потенцијал за ПХО (1.1) у облику:

$$V_J(r) = \frac{m\omega^2}{8} r_J^2 \left(\frac{r}{r_J} - \frac{r_J}{r} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{4} \left(r_J^2 - r_0^2 \right), \quad (1.2)$$

где се појављују два нова карактеристична параметра за ротациони ПХО:

$$r_J = \left[\frac{2\hbar}{m\omega} \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \left[\left(J + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{m\omega}{2\hbar} r_0^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

Овај облик под којим је написан потенцијал ПХО дозвољава да се имплицитно ротациони случај $(J \neq 0)$ сведе на неротациони $(J = 0)$ и на тај начин оба случаја се могу обрадити заједничким поступком. То значи да решења за $(J = 0)$ се аутоматски могу преписати за случај $(J \neq 0)$, ако се равнотежно растојање r_0 између језгара замени новим равнотежним растојањем r_J (1.3). То је једна од предности коју ПХО пружа у односу на ХО-3Д.

Одступање од вредности r_0 јасно показује утицај угаоног (кинетичког) момента ротационог кретања језгара, путем ротационог квантног броја J, сходно изразу који се добија из формуле (1.3):

$$r_J = r_0 \left[1 + \left(\frac{2\hbar}{m\omega r_0^2} \right)^2 J(J+1) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1.4)$$

Осим тога, из формула (1.1) и (1.2) може се видети да се ротациони потенцијал ПХО (дакле, неротациони потенцијал ПХО коме се придодаје центрифугални потенцијал) може написати као померени потенцијал ПХО, са истом константом силе $k(r)$ као и неротациони ПХО потенцијал. Као што се примећује, $k(r)$ не зависи од ротационог квантног броја J, дакле ротационо кретање не утиче на константу силе.

Да бисмо лакше уочили сврху коришћења ПХО, проанализирајмо које су његове сличности и разлике у односу на изотропни потенцијал ХО-3Д који има исти положај равнотеже r_0, исту редуковану масу m и исту константу силе у равнотежном положају [8]:

$$V_h(r) = \frac{m\omega^2}{8}(r - r_0)^2 \equiv \frac{m\omega_0^{\ 2}}{2}(r - r_0)^2 \quad (1.5)$$

За разлику од ХО-3Д (чија је константа силе заиста константна), код ПХО она зависи од радиајлне координате r:

$$k(r) \equiv \frac{d^2V}{dr^2} = \begin{cases} \dfrac{m\omega^2}{4} \equiv m\omega_0^2 = const \ \ за ХО\text{–}3Д \\ \dfrac{m\omega^2}{4}\left(1 + \dfrac{3r_J^4}{r^4}\right), \qquad за ПХО \end{cases} \quad (1.6)$$

Дакле, код ротационог ПХО константа силе је велика у близини равнотежног положаја r_J и мала на већим растојањима од равнотежног. Пошто константа силе зависи од растојања $k = k(r)$, јасно ја да сила која делује међу језгрима није чисто еластична, већ квазиеластична. Као последица тога, осцилације језгара атома нису хармонијске већ анхармонијске, а та анхармоничност доводи до деформације криве потенцијала од параболичног симетричног облика у односу на равотежни положај. Што су међујезгровна растојања већа, тиме су атоми у молекулу све слабије повезани. У том погледу, ПХО верније описује осцилације језгара двоатомног молекула него ХО-3Д.

Осим тога, потенцијал ПХО има у $r = 0$ сингуларну тачку, што у потпуности одговара карактеру међујезгровног одбијања.

Ротационо-вибрациона Шредингерова једначина за редуковану радијалну функцију $u_v^\alpha(r) = rR_{vJ}(r)$ ПХО има облик:

$$H_\alpha(r)u_v^\alpha(r) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{m\omega^2}{8}r_J^2\left(\frac{r}{r_J}-\frac{r_J}{r}\right)^2\right]u_v^\alpha(r)$$
$$=\left(E_{vJ}-E_{eff}^{rot}\right)u_v^\alpha(r) \tag{1.7}$$

где је v - вибрациони квантни број, а E_{eff}^{rot} - ефективна ротациона енергија:

$$E_{eff}^{rot} \equiv \frac{m\omega^2}{4}\left(r_J^2-r_0^2\right) \tag{1.8}$$

Нормиране радијалне редуковане својствене функције Хамилтонијана и својствене вредности енергије могу се наћи методом полинома (коју је својевремено предложио Зомерфелд за случај ХО) и дате су у раду [8]:

$$u_v^\alpha(r) = rR_{vJ}(r) = \frac{1}{B}\left[\frac{B^3 v!}{2^\alpha\Gamma(v+\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{2}}(Br)^{\alpha+\frac{1}{2}}$$
$$\exp\left(-\frac{B^2}{4}r^2\right)L_v^\alpha\left(\frac{B^2}{2}r^2\right) \tag{1.9}$$

$$E_{vJ} = \hbar\omega\left(v+\frac{1}{2}\right)+\frac{\hbar\omega}{2}\alpha-\frac{m\omega^2}{4}r_0^2 \equiv E_{0,J}+\hbar\omega v \tag{1.10}$$

где смо обележили

$$B=\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.11}$$

У горњем изразу $\Gamma(x)$ је гама функција Еулера, а $L_v^\alpha(x)$ су генералисани Лагерови полиноми.

Приметно је да оба потенцијала (и ПХО, као и ХО-3Д) имају неограничен број енергетских нивоа (дакле не постоји дисоцијативност молекула, што у потпуности отступа од понашања реалних молекула).

Такође, енергетски спектар ПХО (као и ХО-3Д) је позитиван, има еквидистантне вибрационе енергетске нивое, а својствене функције Хамилтонијана се могу нормирати [12]. То су важне карактеристике када се ради о конструисању кохерентних стања.

Захваљујући математичкој структури својствених функција ПХО, сви интеграли (за рачунање средњих вредности, Френк-Кондонових фактора и.т.д.) могу бити изведени у аналитичком (затвореном) облику (као и код ХО-3Д), што чини ПХО веома привлачним моделом.

Друга предност ПХО у односу на ХО-3Д је та што су средње вредности центрифугалног члана ($\left\langle r^{-2}\right\rangle$) ограничене величине, као резултатат конвергентних интеграла, што код ХО-3Д није случај (тамо су такви интеграли дивергентни).

Иако се раније сматрало да се једначине за ПХО могу егзактно решити само за тродимензионални случај, а такође и за дводимензионални [8], последњих година појавили су се радови који овај проблем генерализују за арбитрарни D–димензионални случај [13, 14].

Што се примена тиче, квантни системи који садрже ПХО важни су како за квантну и физичку хемију [1-4], [8,9], [13], али и за појаве везане за хаотичне системе, за квантне системе који се описују временски зависним осцилаторима, за системе који садрже мешавину чистих бозона и фермиона и.т.д. (за детаље види рад [15] и литературу назначену тамо). Недавно је установљено да се динамика честица које се крећу у близини хоризонта црних рупа може такође асоцирати са ПХО [16, 17]. Друге интересантне примене ПХО (сингуларног осцилатора), као и одговарајућа литература назначене су у раду [18]. Уопште, ПХО се може применити, због свог енергетског спектра, како код линеарних, тако и код нелинеарних система [5].

Сва горе наведена својства чине проучавање ПХО посебно интересантним.

На крају овог уводног поглавља, да приметимо да се ХО-3Д може сматрати као крајњи осцилатор за ПХО, имајући у виду да постоји *хармонијски лимес* за ПХО [19]:

$$\lim_{\substack{\omega\to 2\omega_0\\ r_0\to 0\\ \alpha\to J+\frac{1}{2}}} A \equiv \lim_{HO} A = A^{(0)} \tag{1.12}$$

где су физичке величине без горњег индекса придужене ПХО, а оне са горњим индексом (0) односе се на ХО-3Д (фреквенције ω_0).

2. Формализам матрице густине за ПХО

Размотримо квантни идеални гас псеудохармонијских осцилатора који се налазе у условима термодинамичке равнотеже при температури $T=(k_B\beta)^{-1}$, дакле у условима квантне каноничке расподеле. Одговарајућа ненормирана матрица густине у координатној репрезентацији $\{\vec{r}\}$ има следећи облик:

$$\rho(\vec{r},\vec{r}';\beta)=\sum_{vJM}\exp(-\beta E_{vJ})\,\Psi_{vJM}(\vec{r})\Psi_{vJM}^*(\vec{r}') \tag{2.1}$$

где смо са M обележили квантни број пројекције кинетичког момента на осу z, а $\Psi_{vJM}(\vec{r})$ је

својствена функција Хамилтонијана $H(\vec{r})$ који има својствене функције E_{vJ}.

Ненормирана матрица густине задовољава једначину Блоха [20]:

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\rho(\vec{r},\vec{r}';\beta)=H(\vec{r})\rho(\vec{r},\vec{r}';\beta) \tag{2.2}$$

са крајњим (граничним) условом [21]:

$$\lim_{\beta\to 0}\rho(\vec{r},\vec{r}';\beta)=\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{1}{rr'}\delta(r-r')\frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi') \tag{2.3}$$

Траг матрице густине представља партициону функцију (статистички збир или статистички интеграл):

$$Z(\beta)=\int\rho(\vec{r},\vec{r};\beta)d\vec{r} \tag{2.4}$$

Партициона функција је веома важна величина, са информативне тачке гледишта, пошто се помоћу ње могу изразити све физичке величине које карактеришу квантно-статистички систем.

Пошто је ПХО радијални (централносиметрични) потенцијал, својствена функција $\Psi_{vJM}(\vec{r})$ Хамилтонијана $H(\vec{r})$, то јест:

$$H(\vec{r})=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+\frac{m\omega^2}{8}r_0^2\left(\frac{r}{r_0}-\frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{2.5}$$

може се написати као производ између радиајалне компоненте $R_{vJ}(r)$ и угаоне компоненте $\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)$. Ако узмемо у обзир својства сферичних функција $\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)$, матрица густине се може представити у облику:

$$\rho(\vec{r},\vec{r}';\beta)=\frac{1}{4\pi}\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)P_J(\cos\gamma)\rho_J(r,r';\beta) \tag{2.6}$$

где је $P_J(\cos\gamma)$ – Лежандров полином, а γ – угао између вектора $\vec{r}$ и $\vec{r}'$.

Радијална ненормирана матрица густине има следећи облик:

$$\rho_J(r,r';\beta)=\sum_{v=0}^{\infty}\exp(-\beta E_{vJ})R_{vJ}(r)R_{vJ}^*(r') \tag{2.7}$$

и задовољава такође одговарајућу Блохову једначину:

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\rho_J(r,r';\beta)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2+V_J(r)\right]\rho_J(r,r';\beta) \tag{2.8}$$

са следећим граничним условом:

$$\lim_{\beta\to 0}\rho_J(r,r';\beta)=\frac{1}{rr'}\delta(r-r') \tag{2.9}$$

Након промене функције облика

$$g_J(r,r';\beta)=rr'\rho_J(r,r';\beta)\exp(\beta E_{eff}^{rot}) \tag{2.10}$$

једначина се прилично поједностављује:

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}g_J(r,r';\beta)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+V_J(r)\right]g_J(r,r';\beta) \tag{2.11}$$

па се може решити методом Гринове функције која се дефинише као Лапласова трансформација редуковане радијалне матрице густине:

$$G_J(r,r';s)=L\left[g_J(r,r';\beta)\right]\equiv\int_0^{\infty}e^{-s\beta}g_J(r,r';\beta)d\beta \tag{2.12}$$

Добија се следећа једначина:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{m\omega^2}{8}r_J^2\left(\frac{r}{r_J}-\frac{r_J}{r}\right)^2+s\right]G_J(r,r';s)=\delta(r-r') \tag{2.13}$$

где је $s=-\left(E_{vJ}-E_{eff}^{rot}\right)$, то јест енергија са измењеним знаком из једначине (1.7).

Решење ове једначине може се записати у виду интегралне репрезентације Швингера [22, 23], па након стандардних рачунања у вези са Гриновом функцијом оно има облик [24]:

$$\rho_J(r,r';\beta)=\exp\left(\beta\frac{m\omega^2}{4}r_0^2\right)\frac{1}{\sinh\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\frac{m\omega}{2\hbar}\cdot$$
$$\cdot(rr')^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{m\omega}{4\hbar}\left(r^2+r'^2\right)\coth\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right]I_\alpha\left(\frac{\frac{m\omega}{2\hbar}}{\sinh\beta\frac{\hbar\omega}{2}}rr'\right) \tag{2.14}$$

Осим метода Гринове функције за решење Блохове једначине, радијална (и глобална) матрица густине могу се добити и директним путем, користећи релацију (2.7) и својства Лагерових функција (формулу Хиле-Харди) [25, 26] који се појављују у изразу својствених функција (1.9). У раду [19] на тај смо начин добили следећи резултат:

$$\rho(\vec{r},\vec{r}';\beta)=\rho^{(0)}(\vec{r},\vec{r}';\beta)\left[\frac{(1-2\lambda\cos\gamma+\lambda^2)\sinh\beta\frac{\hbar\omega}{2}}{\frac{m\omega}{4\hbar}rr'\sin^2\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\lambda^J}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{m\omega}{4\hbar}\frac{\sin^2\gamma}{\sinh\beta\frac{\hbar\omega}{2}}rr'\right)^{\alpha} \tag{2.15}$$

где смо евидентирали глобалну матрицу густине за изтропни ХО-3Д који има исту редуковану масу али упола мању угаону фреквенцију $\omega_0=\frac{\omega}{2}$:

$$\rho^{(0)}(\vec{r},\vec{r}';\beta)=\left(\frac{m\omega_0}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{(\sinh\beta\hbar\omega_0)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\pi\hbar}\left[\left(r^2+r'^2\right)\coth\beta\hbar\omega_0-\frac{2\cos\gamma}{\sinh\beta\hbar\omega_0}rr'\right]\right) \tag{2.16}$$

Бездимензионални параметар $|\lambda|<1$, који се појављује у оквиру функције генератрисе Лагранжеових полинома, то јест [25]:

$$\frac{1}{(1-2\lambda\cos\gamma+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}=\sum_{J=0}^{\infty}P_J(\cos\gamma)\lambda^J \tag{2.17}$$

описује степен анхармонилности ПХО. У случају хармонијског лимеса за ПХО (1.12), треба додати и $\lambda\to 0$.

Термичка (квантно-статистичка) средња вредност извесне физичке величине (физичке опсервабилне) A која карактерише квантно-канонички идеални гас ПХО израчунава се релацијом:

$$\langle A\rangle=\frac{1}{Z(\beta)}\int A(\vec{r}')\,\rho(\vec{r},\vec{r}';\beta)\big|_{\vec{r}'=\vec{r}}\,d\vec{r} \tag{2.18}$$

где се најпре изводе рачунске операције које налаже оператор $A(\vec{r}')$ над функцијом $\rho(\vec{r},\vec{r}';\beta)$, а затим се $\vec{r}'$ замењује са $\vec{r}$.

Од особите су важности средње термичке вредности целих степена координате r^n, где је $n=1,2,\ldots$ [19]:

$$\langle r^n\rangle=\left(\frac{2\hbar}{m\omega}\coth\beta\frac{\hbar\omega}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\lim_{\gamma\to 0}\frac{S_{(\alpha)}^{(n+1)}}{S_{(\alpha)}^{(1)}} \tag{2.19}$$

где смо обележили:

$$S_{(\alpha)}^{(n+1)}=\sum_{J=0}^{\infty}\lambda^J\frac{\Gamma\left(\alpha+1+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}u^{2\alpha},\qquad u=\frac{\sin\gamma}{2\sinh\beta\frac{\hbar\omega}{4}} \tag{2.20}$$

Руководећи се истим правилама рачунања, добијамо изразе за партиционо функцију Z, слободну енергију F, унутрашњу енергију U, као и за ентропију S гаса ПХО које одговарају једном од укупно N осцилатора:

$$Z(\beta)=Z^{(0)}(\beta)\frac{2(1-\lambda)}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\beta\frac{m\omega^2}{4}r_0^2\right)\lim_{u\to 0}\frac{S_{(\alpha)}^{(1)}}{u} \tag{2.21}$$

$$F=F^{(0)}-\frac{1}{\beta}\ln\frac{2(1-\lambda)}{\sqrt{\pi}}-\frac{m\omega^2}{4}r_0^2-\frac{1}{\beta}\ln\left[\lim_{u\to 0}\frac{S_{(\alpha)}^{(1)}}{u}\right] \tag{2.22}$$

$$U=U^{(0)}-\frac{m\omega^2}{4}r_0^2-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left[\lim_{u\to 0}\frac{S_{(\alpha)}^{(1)}}{u}\right] \tag{2.23}$$

$$S=S^{(0)}+k_B\ln\frac{2(1-\lambda)}{\sqrt{\pi}}+k_B\ln\left[\lim_{u\to 0}\frac{S_{(\alpha)}^{(1)}}{u}\right]$$
$$-k_B\beta\frac{\hbar\omega}{4}\coth\beta\frac{\hbar\omega}{4}\left[1-\lim_{u\to 0}u\frac{\partial}{\partial\beta}\ln S_{(\alpha)}^{(1)}\right] \tag{2.24}$$

а моларна калорична топлота при константној запремини има израз:

$$C_V=C_V^{(0)}-R\left(\beta\frac{\hbar\omega}{4}\right)^2\frac{1}{\left(\sinh\beta\frac{\hbar\omega}{4}\right)^2}\left[1-\lim_{u\to 0}u\frac{\partial}{\partial u}\ln S_{(\alpha)}^{(1)}\right]+$$
$$+R\left(\beta\frac{\hbar\omega}{4}\right)^2\left(\coth\beta\frac{\hbar\omega}{4}\right)^2\lim_{u\to 0}\left[u\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\ln S_{(\alpha)}^{(1)}\right)\right] \tag{2.25}$$

Ако овим формулама применимо хармонијски лимес (1.12), добићемо изразе за одговарајуће физичке величине карактеристичне за изотропни идеални канонички гас ХО-3Д, што само потврђује исправност нашег поступка [19]:

$$\lim_{HO}Z(\beta)=Z^{(0)}(\beta)=\frac{1}{\left(2\sinh\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}\right)^3} \tag{2.26}$$

$$\lim_{HO} F = F^{(0)} = 3\left[\frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{1}{\beta}\ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega_0}\right)\right] \quad (2.27)$$

$$\lim_{HO} U = U^{(0)} = 3\left(\frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar\omega_0}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1}\right) \quad (2.28)$$

$$\lim_{HO} S = S^{(0)} = 3k_B\left(\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}\coth\beta\frac{\hbar\omega_0}{2} - \ln 2\sinh\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}\right) \quad (2.29)$$

$$\lim_{HO} C_V = C_V^{(0)} = 3R\left(\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}\right)^2 \frac{1}{\left(\sinh\beta\frac{\hbar\omega_0}{2}\right)^2} \quad (2.30)$$

Осим примене хармонијског лимеса, средње вредности координате могу се проверити и директим рачунањем у формулама типа:

$$\left\langle r^n \right\rangle = \frac{1}{Z(\beta)}\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)\sum_{v=0}^{\infty} e^{-\beta E_{vJ}}\left\langle r^n \right\rangle_{vJ} \quad (2.31)$$

или, пак, применом Хелман-Фајнманове теореме за миксована (термичка) стања [27].

Није наодмет напоменути да се термичке средње вредности за квантни канонички идеални гас ПХО сасвим елегантно могу разматрати за два крајња случаја вредности равнотежног положаја у одсуству ротације, r_0 :

а. случај малих вредности за r_0 (такозвана m – апроксимација) и

б. случај великих вредности за r_0 (такозвана M – апроксимација) [28].

3. Кохерентна стања – општи приступ

Историјски гледано, кохерентна стања (КС) придружена обичном једнодимензионалном квантном хармонијском осцилатору ХО-1Д $|z>$, где је z комплексан број, дефинисана су на три еквивалентна (конвергентна) начина. Реч конвергентна треба схватити у смислу да свака од тих дефиниција доводи до истог резултата, то јест до средњих вредности за координату и импулс, израчунате у КС, то јест $<z|x|z>$ и $<z|p|z>$, које имају исти начин временске еволуције као и одговарајуће класичне величине [29].

Дакле, КС за ХО-1Д могу се дефинисати као:

а) Стања која минимализују Хајзенбергову релацију неодређености, то јест у КС производ између неодређености положаја Δx и импулса Δp има минималну вредност:

$$\Delta x\,\Delta p = \frac{1}{2} \qquad (\hbar = 1) \quad (3.1)$$

б) Стања која дијагонализују бозонски оператор снижења (уништења) A_- :

$$A_-|z> = z|z> \quad (3.2)$$

в) Стања која се добијају применом оператора померања $D(z)$, а то је један од елемената Хајзенберг-Вејлове групе, основном стању квантног система $|0>$:

$$|z> = D(z)|0> \equiv \exp(zA_+ - z^*A_-)|0> \quad (3.3)$$

Овде је са A_+ назначен бозонски оператор повишења (креације).

Примећује се да приступ а) има јасну физичку основу, док су приступи б) и в) чисто алгебарски.

Треба подвући да су ове три дефиниције еквивалентне (конвергентне) само за ХО-1Д, док за остале осцилаторе (квантне системе) ова примедба не важи. Покушаји да се и за остале осцилаторе (потенцијале) конструишу КС, која су названа генералисаним кохерентним стањима (ГКС), почели су радовима Ниета и сарадника [30]. Они су ишли у правцу дефиниције a, то јест настојало се да се изнађе пар квантних променљивих X и P, по узору на каноничне променљиве x и p, које да омогуће да се Хамилтонијан генералисаног потенцијала напише налик на Хамилтонијан ХО-1Д. Са тим новим паром каноничних променљивих настоји се да се напише релација неодређености, а ГКС су она стања која минимализују ову релацију.

Алгебарски приступ (б и в) за изналажење ГКС отворен је радовима Переломова [31], који је конструисао КС за арбитрарну Ли групу придружену размотреном Хамилтонијану.

Засновано на овим дефиницијама, у последњих 75 година појавило се неколико врсти „некласичних" стања са непосредном применом у квантној оптици (као, на пример, нелинеарна кохерентна стања, стиснута стања, деформисана стања, интелигентна стања, стања са додатним фотонима и.т.д.), а детаљан преглед може се наћи у монографском раду Додонова [32].

У наставку покушаћемо да дамо општи приступ конструисања КС.

Претпоставимо да бездимензионални Хамилтонијан H има следећу једначину својствених вредности:

$$H|n;\lambda> = E_n(\lambda)|n;\lambda> \quad (3.4)$$

где је $n = 0,1,2,\ldots,M$, а $M \le \infty$, зависно од тога да ли је енергетски спектар (претпоставимо, овде, да је он

недегерисан, али то у принципу не мења расуђивање) ограничен или не. Параметар λ може бити реалан или имагинаран (на пример, ротациони квантни број, или било који параметар од кога зависи Хамилтонијан).

Својствени вектори $|n;\lambda>$ су ортогонални и нормирани у Хилбертовом пространству.

Ако се за Хамилтонијан H може пронаћи пар оператора снижења A_- и повишења A_+, који да не комутирају, а није обавезно да буду реципрочно адјуговани (то јест, $(A_-)^+ \overset{?}{=} A_+$ и $(A_+)^+ \overset{?}{=} A_-$), али који да задовољавају следеће једначине (налик на оне за ХО-1Д):

$$A_-|n;\lambda> = \sqrt{e_n(\lambda)}\,|n-1;\lambda> \tag{3.5}$$

$$A_+|n;\lambda> = \sqrt{e_{n+1}(\lambda)}\,|n+1;\lambda> \tag{3.6}$$

онда произилази да је:

$$A_+A_-|n;\lambda> = e_n(\lambda)\,|n;\lambda> \tag{3.7}$$

Углавном, операторе $A_\mp$ није тешко пронаћи за обичне потенцијале, за које се познају радијалне својствене функције $\Psi_{n\lambda}(r) \equiv <r|n;\lambda>$ Хамилтонијана H. Обичним поступцима рачунања извода, множења итд. над својственим функцијама, стиже се до једначина облика (3.5) и (3.6).

За ХО-1Д, до једне адитивне константе, важи једнакост $e_n = E_n = n$, па је у том случају оператор A_+A_- једнак оператору броја честица (или броја кванта) N. У општем случају ова једнакост не важи, па је $A_+A_- \neq N$. Ако постоји линеарна веза $e_n = aE_n + b$, онда се стиже до такозваних Митаг-Лефлерових КС [33].

Да се подробније позабавимо дефиницијом *б*. Дефинишимо, дакле, КС $|z;\lambda>$ по поступку *б*:

$$A_-|z;\lambda> = z\,|z;\lambda> \tag{3.8}$$

и развијмо их у ред по својственим векторима Хамилтонијана:

$$|z;\lambda> = \sum_{n=0}^{M} c_n(z;\lambda)\,|n;\lambda> \tag{3.9}$$

Функције $c_n(z;\lambda) \equiv <n;\lambda|z;\lambda>$ се налазе једноставним рекурентним поступком, користећи једначине (3.5) и (3.8):

$$c_n(z;\lambda) = c_0(z;\lambda)\frac{z^n}{\sqrt{\rho(n;\lambda)}} \tag{3.10}$$

где смо обележили:

$$\rho(n;\lambda) = \rho(1;\lambda)\rho(2;\lambda)\ldots\rho(n;\lambda) \equiv \prod_{j=0}^{n}\rho(j;\lambda), \qquad \rho(0;\lambda) \equiv 1. \tag{3.11}$$

Добијамо, дакле, израз развоја КС по својственим векторима стања:

$$|z;\lambda> = c_0(z;\lambda)\sum_{n=0}^{M}\frac{z^n}{\sqrt{\rho(n;\lambda)}}\,|n;\lambda> \tag{3.12}$$

Функција $c_0(z;\lambda)$ добија се из услова нормирања КС:

$$<z;\lambda|z;\lambda> = 1 \tag{3.13}$$

и она се може представити на следећи начин:

$$c_0(z;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^{M}\frac{|z|^{2n}}{\rho(n;\lambda)}}} \tag{3.14}$$

Сума у овој релацији је конвергентна, са радијусом конвергенције $|z|^2 < R$, $0 < R \le \infty$, што знатно смањује могућности избора функција $\rho(n;\lambda)$ и чини да породица „истинитих" КС не буде тако бројна [34].

КС су неортогонални вектори Хилбертовог пространства:

$$<z';\lambda|z;\lambda> = \frac{c_0(z';\lambda)c_0(z;\lambda)}{\left[c_0(\sqrt{z'^* z};\lambda)\right]^2} \tag{3.15}$$

и задовољавају услов непрекидности у погледу променљиве z, то јест испуњавају следећи услов:

$$\begin{aligned} &|z'-z| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \| |z';\lambda> - |z;\lambda> \|^2 \\ &= 2(1 - \mathrm{Re} <z';\lambda|z;\lambda>) \to 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Такође, КС образују прекомплетни скуп базисних неортогоналних вектора Хилбертовог простора стања, то јест јединични оператор се може изразити као интеграл по њиховим пројекторима (или, другачије речено, јединични оператор се може «разложити» или «раздвојити»):

$$\int d\mu(z;\lambda)\,|z;\lambda><z;\lambda| = I = \sum_{n=0}^{M}|n;\lambda><n;\lambda| \tag{3.17}$$

Ако узмемо да комплексни број z има облик $z = r\exp(i\varphi)$, онда се интеграциона мера се може изразити као:

$$d\mu(z;\lambda) = \frac{d^2z}{\pi}W(|z|^2;\lambda) = \frac{d\varphi}{\pi}W(r^2;\lambda) \tag{3.18}$$

под условом да тежишна функција $W(r^2;\lambda)$ буде позитивна [34].

Комбиновањем ових двају једначина добијамо следећу релацију:

$$\sum_{v,n=0}^{M}\frac{|n;\lambda><v;\lambda|}{\sqrt{\rho(n;\lambda)\rho(v;\lambda)}}\int_0^R drr[c_0(z;\lambda)]^2 W(r^2;\lambda)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\pi}z^n(z^*)^v = I \tag{3.19}$$

Последњи интеграл који има као резултат:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\pi}z^n(z^*)^v = r^{n+v}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\pi}e^{i(n-v)\varphi} = 2r^{2n}\delta_{nv} \tag{3.20}$$

заједно са следем заменом функције:

$$W(r^2;\lambda) = \frac{1}{[c_0(z;\lambda)]^2}h(r^2;\lambda) \tag{3.21}$$

доводи нас до следеће условне једначине:

$$2\int_0^R dr\, r\, r^{2n}\, h(r^2;\lambda) = \rho(n;\lambda) \tag{3.22}$$

Корисно је да извршимо замену променљиве $r^2 = x$, као и замену $n = s-1$, то јест да природне вредности за n продужимо на комплексне вредности s, тако да $n \to s-1$ [33], онда добијамо следећи математички проблем у којем је $h(x;\lambda)$ непозната функција:

$$\int_0^R dx\, x^{s-1}\, h(x;\lambda) = \rho(s-1;\lambda) \tag{3.23}$$

Да бисмо остварили разлагање јединичног оператора, најпре треба да изнађемо радијус конвергенције R [34]:

$$R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\rho(n;\lambda)} \tag{3.24}$$

који, наравно, треба да буде различит од нуле. Ако је $R = \infty$, то је проблем који се назива проблемом Стилтжесових момената (*Stieltjes moment problem*) и добијају се КС на целој комплексној равни, а ако је $R < \infty$, то је проблем који се назива проблемом Хаусдорфових момената (*Hausdorff moment problem*) и као резултат добијају се КС на комплексном диску полупречника R.

Као што је то уобичајено у специфичној литератури [33], [35], можемо дефинисати нову функцију по интервалима:

$$g(x;\lambda) = \begin{cases} g(x;\lambda), & 0 < x \le R \\ 0, & R < x < \infty \end{cases} \tag{3.25}$$

и интерпретирати проблем (3.23) као трансформацију Мелина $g^*(s;\lambda)$ за функцију $g(x;\lambda)$ [33]:

$$\int_0^\infty dx\, x^{s-1} g(x;\lambda) \equiv g^*(s;\lambda) \overset{def}{=} M\left[g(x;\lambda);s\right] \tag{3.26}$$

Примењујући правило инверзије, добијамо:

$$g(x;\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\, x^{-s}\, g^*(s;\lambda) \overset{def}{=} M^{-1}\left[g^*(s;\lambda);x\right] \tag{3.27}$$

Дакле, разлагање јединичног оператора се може остварити само ако постоји инверзна Мелинова трансформација за функцију $\rho(n;\lambda)$.

Међутим, имајући у виду да функција $\rho(s-1;\lambda)$ садржи производе и количнике Ојлерових гама функција, за решавање проблема момената можемо користити дефиницију G-функција Мејера и инверзиону теорему Мелина [36]:

$$\int_0^\infty dx x^{s-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\alpha x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, & \ldots, & a_n, & a_{n+1}, & \ldots, & a_p \\ b_1, & \ldots, & b_m, & b_{m+1}, & \ldots, & b_q \end{matrix}\right) = \frac{1}{\alpha^s}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\prod_{j=n+1}^{m}\Gamma(a_j+s)} \tag{3.28}$$

На тај начин добија се да је:

$$h(x;\lambda) = G_{p,q}^{m,n}(\alpha x|\ldots) \tag{3.29}$$

а интеграциона мера постаје:

$$d\mu(z;\lambda) = \frac{d^2z}{\pi}\frac{1}{[c_0(z;\lambda)]^2}G_{p,q}^{m,n}(\alpha|z|^2|\ldots) \tag{3.30}$$

Сада треба поставити питање јединствености решења (3.29). Довољан услов за јединственост је Карлеманов услов [37], [33]: ако решење проблема (3.23) постоји, онда, зависно од вредности доњег збира, имамо следеће две ситуације:

$$S \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty}[\rho(n;\lambda)]^{-\frac{1}{2n}} = \begin{cases} \infty, & \textit{решење је јединствено} \\ <\infty, & \textit{постоји више решења} \end{cases} \tag{3.31}$$

За тестирање конвергенције реда S користе се познати методи, као, на пример, логаритмички или Даламберов тест за конвергенцију редова [33]:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}\quad\begin{cases}<-1, & S\ \textit{je конвергентан}\\ >-1, & S\ \textit{je дивергентан}\end{cases}\qquad(3.32)$$

Једначина разлагања јединичног оператора (3.17) омогућује да се простор арбитрарних вектора $|\Psi>$ организује као Хилбертов простор аналитичких функција $\Psi(z^*;\lambda)$ (на целом комплексном простору, или само на комплексном диску полупречника R, зависно већ о којим се КС ради) [31], [38]. Произвољно нормирано стање $|\Psi>$ може се разложити по КС:

$$|\Psi>=\int d\mu(z;\lambda)<z;\lambda|\Psi>|z;\lambda>\qquad(3.33)$$

а аналитичка функција $\Psi(z^*;\lambda)$ дефинише се као:

$$\Psi(z^*;\lambda)\equiv\left[c_0(z;\lambda)\right]^{-1}<z;\lambda|\Psi>=\sum_{n=0}^{M}\frac{<n;\lambda|\Psi>}{\sqrt{\rho(n;\lambda)}}(z^*)^n\qquad(3.34)$$

Дакле, претходно се разлагање може написати као:

$$|\Psi>=\int d\mu(z;\lambda)c_0(z;\lambda)\Psi(z^*;\lambda)|z;\lambda>\qquad(3.35)$$

Ако узмемо у обзир једначину разлагања јединице, скаларни производ двају произвољних вектора може се написати на следећи начин:

$$<\Phi|\Psi>=\int d\mu(z;\lambda)<\Phi|z;\lambda><z;\lambda|\Psi>=$$
$$=\int d\mu(z;\lambda)[c_0(z;\lambda)]^2\Phi(z;\lambda)\Psi(z^*;\lambda)\equiv\int d\mu_s(z;\lambda)\Phi(z;\lambda)\Psi(z^*;\lambda)\qquad(3.36)$$

где смо дефинисали нову интеграционо меру:

$$d\mu_S(z;\lambda)=d\mu(z;\lambda)[c_0(z;\lambda)]^2=\frac{d^2z}{\pi}G_{p,q}^{m,n}\left(\alpha|z|^2|\ldots\right)\qquad(3.37)$$

Користећи се својствима интеграла од G-функција Мејера [36], лако се могу израчунати такви скаларни производи.

На описани начин се може успоставити кореспонденција један на један између вектора $|\Psi>$ Хилбертовог пространства и целих аналитичких функција које испуњавају следећи услов:

$$I=<\Psi|\Psi>=\int d\mu(z;\lambda)[c_0(z;\lambda)]^2|\Psi(z^*;\lambda)|^2$$
$$\equiv\int d\mu_s(z;\lambda)|\Psi(z^*;\lambda)|^2\qquad(3.38)$$

Функција $\Psi(z^*;\lambda)$, дефинисана релацијом (3.34), назива се репрезентацијом кохерентних стања за вектор $|\Psi>$. За случај $M\to\infty$, ред у (3.34) дефинише аналитичку функцију нове променљиве $\varsigma=z^*$, која се може сматрати различитом репрезентацијом од оне првобитне. Недавно је у раду [39], где је реч о генералисаним хипергеометријским кохерентним стањима (ГХКС), таква репрезентација названа генералисаном хипергеометријском аналитичком репрезентацијом вектора $|\Psi>$.

У посебном случају, када је вектор $|\Psi>$ баш једно од кохерентних стања, на пример $|y;\lambda>$, онда релација (3.33) представља линеарну зависност између кохерентних стања:

$$|y;\lambda>=\int d\mu(z;\lambda)<z;\lambda|y;\lambda>|z;\lambda>\qquad(3.39)$$

Функција дефинисана на следећи начин:

$$K_\lambda(z;y)\equiv<z;\lambda|y;\lambda>\qquad(3.40)$$

представља репродукционо језгро за КС:

$$K_\lambda(x;y)=\int d\mu(z;\lambda)K_\lambda(x;z)K_\lambda(z;y)\qquad(3.41)$$

Произилази да је систем КС прекомплетан систем, то јест он садржи подсистеме који су комплетни [31].

На крају овог поглавља да се позабавимо проблемом временске стабилности КС. Ако се на КС делује експоненцијалним оператором од Хамилтонијана, добија се:

$$e^{-iHt}|z;\lambda>=c_0(z;\lambda)\sum_{n=0}^{M}\frac{z^n}{\sqrt{\rho(n;\lambda)}}e^{-iE_nt}|n;\lambda>\qquad(3.42)$$

Ова се релација може упростити за случај осцилатора који имају линеарни енергетски спектар $E_n=an+b$, као што су, на пример, ХО-1Д и ПХО:

$$e^{-iHt}|z;\lambda>=e^{-ibt}c_0(z;\lambda)\sum_{n=0}^{M}\frac{\left(ze^{-iat}\right)^n}{\sqrt{\rho(n;\lambda)}}|n;\lambda>$$
$$=e^{-ibt}|ze^{-iat};\lambda>\equiv e^{-ibt}|z(t);\lambda>\qquad(3.43)$$

На тај се начин могу дефинисати временско зависна КС:

$$|z;\lambda;t>\equiv e^{-iHt}|z;\lambda>=e^{-ibt}|z(t);\lambda>\qquad(3.44)$$

Друго својство КС је такозвани акциони идентитет (action identity). Ако се на КС делује Хамилтонијаном (3.4), добија се:

$$H|z;\lambda>=c_0(z;\lambda)\sum_{n=0}^{M}\frac{z^n}{\sqrt{\rho(n;\lambda)}}E_n(\lambda)|n;\lambda>\qquad(3.45)$$

Ова релација има особиту важност за Хамилтонијане који задовољавају услов да је $H=A_+A_-$, дакле за

које је $E_n(\lambda) = e_n(\lambda)$, а који имају неограничени енергетски спектар ($M \to \infty$). Код таквих КС лако се може доказати акциони идентитет:

$$< z;\lambda \mid H \mid z;\lambda >=\mid z \mid^2 \tag{3.46}$$

Назив акционог идентитета долази од његове везе са акционом константом ($\hbar$) која улази у изразу димензионалних својствених вредности енергије [34].

4. Кохерентна стања и оператор густине

Кохерентна стања су од самог почетка сматрана као «најкласичнијим» међу чистим квантним стањима. Истовремено, КС су полазна основа за дефинисање «некласичних стања» у случају миксованих квантних стања (на пример, термалних стања), која се карактеришу нормираним оператором густине [32]:

$$\rho = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n=0}^{M} e^{-\beta E_n} \mid n;\lambda >< n;\lambda \mid \tag{4.1}$$

Недијагонални елементи оператора густине у основи КС – вектора су, дакле:

$$< z';\lambda \mid \rho \mid z;\lambda >= \frac{1}{Z(\beta)} c_0(z';\lambda) c_0(z;\lambda) \sum_{n=0}^{M} \frac{e^{-\beta E_n}}{\rho(n;\lambda)} (z'^* z)^n \tag{4.2}$$

Ако су својствене вредности енергије E_n линеарне функције квантног броја n (као што је случај код ХО и ПХО), онда се горњи израз може прилично поједноставити. Међутим, ако је реч о функцији другог степена (као код честице у бесконачно дубокој потенцијалној јами, код потенцијала типа Пешл-Телера или Морзеа и.т.д.), онда је решење прилично компликовано и треба применити неке специфичне методе (за Морзеов потенцијал, види рад [40]).

Размотримо детаљније први случај, када је енергетски спектар облика:

$$E_n = a\,n + b \tag{4.3}$$

што аутоматски претпоставља да је испуњен услов: $M \to \infty$. Израз (4.2) тада гласи:

$$< z';\lambda \mid \rho \mid z;\lambda >= \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta b} \frac{c_0(z';\lambda) c_0(z;\lambda)}{\left[c_0(e^{-\beta a}\sqrt{z'^* z};\lambda)\right]^2} \tag{4.4}$$

Услов нормирања оператора густине ($Tr\rho = 1$) тражи да се испуни услов:

$$\int d\mu(z;\lambda) < z;\lambda \mid \rho \mid z;\lambda > = 1 \tag{4.5}$$

Након једноставних сукцесивних замена, укључујући и замену променљиве $r^2 = x$, добијамо:

$$\frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-\beta a}\right)^n}{\rho(n;\lambda)} \int_0^R dx\, x^n h(x;\lambda) = 1 \tag{4.6}$$

и затим, узевши у обзир релацију (3.23), услов (4.5) бива задовољен, пошто се партициона функција рачуна на овај начин:

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(a\,n+b)} \tag{4.7}$$

Доказано је да се оператор густине може изразити као интеграл по пројекторима кохерентних стања [41]:

$$\rho = \frac{1}{Z(\beta)} \int d\mu(z;\lambda) \mid z;\lambda > P(\mid z \mid^2;\lambda) < z;\lambda \mid \tag{4.8}$$

Функција $P(\mid z \mid^2;\lambda)$, која овде игра истовремено и улогу тежишне функције, зове се Глаубер-Сударшанова P - функција [29].

Користећи изразе за интеграциону меру и КС (3.12), (3.18), (3.20), као и (3.21), добијамо:

$$\rho = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,v=0}^{\infty} \frac{\mid n;\lambda >< v;\lambda \mid}{\sqrt{\rho(n;\lambda)\rho(v;\lambda)}} 2\int_0^R dr\, r^{2n+1} h(r^2;\lambda) P(r^2;\lambda) \tag{4.9}$$

Пошто се, у крајњој линији, оператор густине може изразити у виду (4.1), јасно је да горњи интеграл треба да задовољи интегралну једначину:

$$2\int_0^R dr\, r^{2n+1} h(r^2;\lambda) P(r^2;\lambda) = e^{-\beta E_n} \rho(n;\lambda) \tag{4.10}$$

Да бисмо овај проблем свели на проблем Стилтжесових (или Хаусдорфових) момената, треба да извршимо замене: $n = s-1$, $r^2 = x$, као и замену функције:

$$P(x;\lambda) = e^{-\beta b} \frac{1}{h(x;\lambda)} g(x;\lambda) \tag{4.11}$$

па тако добијамо:

$$\int_0^R dx\, x^{s-1} g(x;\lambda) = e^{\beta(a-b)} \frac{1}{\left(e^{\beta a}\right)^s} \rho(s-1;\lambda) \tag{4.12}$$

Пошто функција $g(x;\lambda)$ испод знака интеграле зависи искључиво од структуре функције $\rho(s-1;\lambda)$ и константе која је испред ове функције, тада произилази да ће тражена функција $g(x;\lambda)$ имати исту структуру као и функција $h(x;\lambda)$ из релације

(3.29), само што у овом случају параметар јесте $\alpha = e^{-\beta a}$. Дакле, P - функција има израз:

$$P(|z|^2;\lambda) = e^{\beta(a-b)} \frac{G_{p,q}^{m,n}(e^{\beta a}|z|^2|\ldots)}{G_{p,q}^{m,n}(|z|^2|\ldots)} \qquad (4.13)$$

Исправност овог резултата може се проверити имплицитно, ако добијена P-функција задовољава следећи услов нормирања, који је последица услова нормирања оператора густине:

$$\frac{1}{Z(\beta)}\int d\mu(z;\lambda)P(|z|^2;\lambda) = 1 \qquad (4.14)$$

Замењивши израз за интеграциону меру (3.30) и P-функцију (4.13), стижемо до следеће релације:

$$\frac{e^{\beta(a-b)}}{Z(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho(n;\lambda)}\int_0^R dx\, x^{s-1} G_{p,q}^{m,n}(e^{\beta a}x|\ldots) = 1 \qquad (4.15)$$

Након замене променљиве $x = e^{-\beta a}y$, горњи интеграл поприма облик (3.28), тако да се сада лако може доказати да је релација (4.14) задовољена.

Дакле, дијагонална репрезентација оператора густине у КС има коначни облик:

$$\rho = \frac{e^{\beta(a-b)}}{Z(\beta)}\int d\mu(z;\lambda)\,|z;\lambda> \frac{G_{p,q}^{m,n}(e^{\beta a}|z|^2|\ldots)}{G_{p,q}^{m,n}(|z|^2|\ldots)} <z;\lambda| \qquad (4.16)$$

Са друге, пак, стране, недијагонални матрични елемент оператора густине између два произвољна вектора $<\Phi|$ и $|\Psi>$ добија се на сличан начин:

$$<\Phi|\rho|\Psi> = \frac{e^{\beta(a-b)}}{Z(\beta)}\int\frac{d^2z}{\pi}\Phi(z;\lambda)\Psi(z^*;\lambda)G_{p,q}^{m,n}(e^{\beta a}|z|^2|\ldots) \qquad (4.17)$$

Практична вредност дијагоналне репрезентације оператора густине (4.8) своди се на томе што се помоћу ње веома лако могу израчунати средње термалне вредности извесног оператора A:

$$<A> = Tr(\rho A) = \frac{1}{Z(\beta)}\int d\mu(z;\lambda)P(z;\lambda)<z;\lambda|A|z;\lambda> \qquad (4.18)$$

а истовремено средња вредност оператора A у КС израчунава се релацијом:

$$<z;\lambda|A|z;\lambda> = [c_0(z;\lambda)]^2\sum_{\nu,n=0}^{M}\frac{(z^*)^\nu z^n}{\sqrt{\rho(\nu;\lambda)\rho(n;\lambda)}}<\nu;\lambda|A|n;\lambda> \qquad (4.19)$$

Од посебног су интереса оператори који дијагонализују основу својствених вектора Хамилтонијана, као, на пример, оператор броја честица (кванта) N и његови степени. Помоћу таквих средњих вредности се могу изразити неке величине које карактеришу разна статистичка својства квантног система, као што су корелациона функција другог реда $g^{(2)}$, односно Манделов параметар Q, за чиста КС:

$$\left(g^{(2)}\right)_{z;\lambda} = \frac{<N^2>_{z;\lambda} - <N>_{z;\lambda}}{(<N>_{z;\lambda})^2} \qquad (4.20)$$

$$Q_{z;\lambda} = <N>_{z;\lambda}\left[\left(g^{(2)}\right)_{z;\lambda} - 1\right] \qquad (4.21)$$

као и њихови одговарајући кореспонденти за миксована (термална) стања [42].

На крају овог поглавља да, укратко, изнесемо својства КС за ХО-1Д угаоне фреквенције ω_0, као илустрацију општег приступа и формула изведених у овом и претходном поглављу. ХО-1Д карактерише се еквидистантним бесконачним енергетским спектром и својственим векторима Хамилтонијана $|n>$, дакле:

$$e_n = n, \qquad M\to\infty, \qquad \lambda = 0, \qquad \rho(n) = n! \qquad (4.22)$$

Оператори снижења (поништења) и повишења (креације) јесу: $A_- \equiv a$ и $A_+ \equiv a^+$, а константа нормирања за КС је:

$$c_0(z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n!}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \qquad (4.23)$$

тако да се скаларни производ двају КС може написати на следећи начин:

$$<z'|z> = \frac{c_0(z')c_0(z)}{c_0(\sqrt{z'^* z})} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|z'|^2 + |z|^2\right) + z'^* z\right] \qquad (4.24)$$

Користећи Стирлингову формулу за асимптотско понашање гама функције [25]:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] \qquad (4.25)$$

као и правило Лопитала, изналазимо да је радијус конвергенције бесконачан:

$$R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Gamma(n+1)} = \infty \qquad (4.25)$$

Ради изналажења тежишне функције интеграционе мере треба решити интеграл:

$$\int_0^\infty dx\, x^{s-1} h(x) = \rho(s-1) = (s-1)! = \Gamma(s) \quad (4.27)$$

Користећи релацију (3.28) и упоредивши одговарајуће елементе са онима из горње релације ($\alpha = m = q = 1, \quad n = p = 0, \quad b_1 = 0, \quad x = r^2$), изналазимо да је [36]:

$$h(x) = G_{01}^{10}(x|0) = e^{-|z|^2} \quad (4.28)$$

тако да интеграциона мера има следећи коначан облик:

$$d\mu(z) = \frac{d^2 z}{\pi} \frac{1}{e^{-|z|^2}} e^{-|z|^2} = \frac{d^2 z}{\pi} \quad (4.29)$$

Као последица тога, разлагање јединичног оператора може се записати као:

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} |\, z >< z \,| = I = \sum_{n=0}^{\infty} |\, n >< n \,| \quad (4.30)$$

Такође, користећи Стирлингову формулу, доказује се да је ред

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{2n}}} \quad (4.31)$$

дивергентан, тако да је интеграциона мера (4.28) јединствена.

Оператор густине за ХО-1Д може се написати као:

$$\rho = \frac{1}{\bar{n}+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} \right)^n |\, n >< n \,| \quad (4.32)$$

где смо са $\bar{n}$ обележили Бозе-Ајнштајнову функцију расподеле:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1} \quad (4.33)$$

Његови недијагонални елементи у основи вектора КС су:

$$< z' |\, \rho \,| z > = \frac{1}{\bar{n}+1} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(|\, z' \,|^2 + |\, z \,|^2 + \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} z'^* z \right) \right] \quad (4.34)$$

а нормирана P -функција има израз [43]:

$$P(|\, z \,|^2) = \frac{1}{\bar{n}} e^{-\frac{1}{\bar{n}}|z|^2} \quad (4.35)$$

На тај начин, дијагонално разлагање оператора густине по КС гласи:

$$\rho = \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} |\, z > e^{-\frac{1}{\bar{n}}|z|^2} < z \,| \quad (4.36)$$

Средња термална вредност оператора A дата је формулом:

$$< A > = \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{1}{\bar{n}}|z|^2} < z \,|\, A \,|\, z > \quad (4.37)$$

и омогућава да се изнађу термалне вредности за корелациону функцију другог реда ($g^{(2)} = 1$), односно Манделовог параметра ($Q = 0$)[43], притом користећи формулу за средњу вредност првог и другог степена оператора броја честица N^m, $m = 1;2$ у КС:

$$< z \,|\, N^m \,|\, z > = e^{-|z|^2} \left[|\, z \,|^2 \frac{d}{d(|\, z \,|^2)} \right]^m e^{|z|^2} \quad (4.38)$$

5. Кохерентна стања за ПХО

Још раније је доказано да је SU(1,1) природна динамичка група асоцирана својственим стањима ПХО [9], [11], [44]. Дискретне репрезентације групе SU(1,1) дате су операторима:

$$K^2 |\, v;k > = k(k-1) |\, v;k > \quad (5.1)$$

$$K_+ |\, v,k > = \sqrt{(v+1)(v+2k)}\, |\, v+1,k > \quad (5.2)$$

$$K_- |\, v,k > = \sqrt{v(v+2k-1)}\, |\, v-1,k > \quad (5.3)$$

где је $k = \frac{1}{2}(\alpha+1) > 0$ Баргманов индекс.

Једна од могућих реализација оператора снижења ($A_- \equiv K_-$) и повишења ($A_+ \equiv K_+$) за ПХО јесте [11]:

$$K_\pm = \frac{1}{2} \left(\pm y \frac{d}{dy} \pm \frac{1}{2} - y^2 + 2v + \alpha + 1 \right) \quad (5.4)$$

где смо користили релацију $\omega = 2\omega_0$, као и нову променљиву:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} Br \quad (5.5)$$

Шредингерова једначина за радијалну редуковану функцију (1.7) може се написти на следећи начин:

$$H_\alpha^{(red)}(y) u_v^\alpha(y) = (2v + \alpha + 1) u_v^\alpha(y) \quad (5.6)$$

где се редуковани бездимензионални ПХО Хамилтонијан може изразити у зависности од трећег оператора SU(1,1) групе, то јест K_3:

$$H_\alpha^{(red)}(y) \equiv \frac{1}{\hbar\omega_0}\left[H_\alpha(r) + m\omega_0^2 r_0^2\right]$$
$$\equiv -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{y^2} = 2K_3, \tag{5.7}$$

Није тешко проверити да ова три оператора задовољавају комутационе релације алгебре Ли групе SU(1,1):

$$\left[K_3, K_\pm\right] = \pm K_\pm \quad , \quad \left[K_-, K_+\right] = 2K_3 \tag{5.8}$$

Јасно је, дакле, да се квантни систем ПХО карактерише SU(1,1) симетријом, са следећим оператором Казимира:

$$K^2 = K_3^2 - \frac{1}{2}(K_+K_- + K_-K_+) = k(k-1) \tag{5.9}$$

а да Баргамнов индекс k инвентарише иредуктибилне (несводљиве) репрезентације групе SU(1,1). У проблему КС придружених ПХО интересују нас само иредуктибилне репрезентације са $k > 0$ (такозвана позитивна серија).

На тај начин остварили смо везу између физичког система (псеудохармонијски осцилатор) и алгебарске динамичке групе SU(1,1), користећи само променљиву са јасном физичком интерпретацијом (радијална координата r, односно њен бездимензиони партнер y), без употребе других, споредних, променљивих.

Постоје три врсте кохерентних стања придружених ПХО, а њихови називи, алгебарски начин дефинисања и њихово разлагање по својственим векторима Хамилтонијана су следећи:

БГ-КС, то јест **Барут-Гирарделова кохерентна стања** дефинишу се као својствене вредности оператора снижења K_- [11]:

$$K_-\,|\,z,k> = z\,|\,z,k> \tag{5.10}$$

на целој комплексној равни.

Нормирана БГ-КС придружена ПХО се у крајњем облику могу разложити по својственим векторима на следећи начин [11]:

$$|\,z,k> = \sqrt{\frac{|\,z\,|^{2k-1}}{I_{2k-1}(2\,|\,z\,|)}}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{z^v}{\sqrt{v!\Gamma(v+2k)}}\,|\,v,k> \tag{5.11}$$

Интеграциона мера у овом случају је:

$$d\mu(z,k) = \frac{d^2z}{\pi}K_{2k-1}(2\,|\,z\,|)I_{2k-1}(2\,|\,z\,|) \tag{5.12}$$

где су $I_\alpha(x)$, односно $K_\alpha(x)$ – модификоване Беселове функције прве, односно друге врсте [26].

КП-КС, то јест **Клаудер-Переломовљева кохерентна стања** дефинишу се деловањем генералисаног оператора померања $\exp\left(\xi K_+ - \xi^* K_-\right)$ над основним стањем $|\,0,k>$ [31]:

$$|\,z,k> = \exp(\xi K_+ - \xi^* K_-)\,|\,0,k> = e^{zK_+}e^{\Gamma K_3}e^{-z^* K_-}\,|\,0,k> \tag{5.13}$$

где су

$$\xi = -\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi);\ z = \frac{\xi}{|\,\xi\,|}\tanh\left|\frac{\theta}{2}\right|;$$
$$\Gamma = \ln(1-|\,z\,|^2);\ |\,z\,| < 1;\ -\infty < \theta < \infty; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

дакле, ова се КС дефинишу само на комплексном кругу.

Након једноставних рачуна, нормирана КП-КС придружена ПХО могу се разложити у облику:

$$|\,z,k> = (1-|\,z\,|^2)^k \sum_{v=0}^{\infty}\frac{z^v}{\sqrt{\dfrac{v!\Gamma(2k)}{\Gamma(v+2k)}}}\,|\,v,k> \tag{5.14}$$

Овим КС одговара следећа интеграциона мера:

$$d\mu(z,k) = (2k-1)\frac{d^2z}{\pi}\frac{1}{(1-|\,z\,|^2)^2} \tag{5.15}$$

ГК-КС, то јест **Газо-Клаудерова кохерентна стања** или следећи скуп нормираних вектора $\left\{|\,J,\gamma;k>,\quad J \ge 0,\quad -\infty < \gamma < \infty\right\}$, уопштено су била дефинисана као разлагање облика [34]:

$$|\,J,\gamma;k> = c_0(J;k)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{J^{\frac{v}{2}}}{\sqrt{\rho(v;k)}}e^{-i\gamma e_v}\,|\,v,k> \tag{5.16}$$

Осим ове уопштене дефиниције, успели смо да дођемо до ГК-КС и на *алгебарски начин*, деловањем оператора $\exp\left(\eta H_\alpha^{(red)}\right)$ на БГ-КС:

$$|\,z,\eta;k>_{GK} \overset{def}{=} \exp\left(\eta H_\alpha^{(red)}\right)|\,z;k>_{BG} \tag{5.17}$$

Даљим рачунањем, добијамо:

$$|\,z,\eta;k>_{GK} = c_0(z;k)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{z^v}{\sqrt{\rho(v;k)}}\exp(\eta H_\alpha^{(red)})\,|\,v,k> =$$
$$= c_0(z;k)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{z^v e^{\eta e_v}}{\sqrt{\rho(v;k)}}\,|\,v,k> \tag{5.18}$$

Ако у овој задњој једначини изаберемо нове промењиве, то јест: $z=\sqrt{J}$, $\eta=-i\gamma$, стижемо до стандардне опште дефиниције (5.16).

Нормирана ГК-КС придружена ПХО имају следећи израз:

$$|J,\gamma;k>=\frac{1}{\sqrt{{}_1F_1(1;k+1;J/2)}}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{J^{\frac{v}{2}}}{\sqrt{\rho(v;k)}}e^{-i\gamma e_v}\,|v,k> \tag{5.19}$$

где је

$$\rho(v;k)=e_1e_2\ldots e_v=2^v\Gamma(v+k+1)/\Gamma(k+1),$$

а обележавање ${}_1F_1(1;k+1;J/2)$ представља хипергеометријски ред.

Одговарајућа интеграциона мера добија се на већ устаљен начин:

$$d\mu(J,\gamma)=\frac{1}{4}\frac{1}{\Gamma(k+1)}{}_1F_1(1;k+1;J/2)\left(\frac{J}{2}\right)^k e^{-\frac{J}{2}}\frac{d\gamma}{\pi}dJ \tag{5.20}$$

Лако је проверити, на начин који смо изложили при крају трећег поглавља, да ГК-КС задовољавају услове временске стабилности и акционог идентитета.

Помоћу одговарајућих формула за средње вредности могу се израчунати, између осталог, и одговарајуће корелационе функције другог реда $g^{(2)}_{z;k}$. Ако је $g^{(2)}_{z;k}<1$, $=1$, односно >1, каже се да су одговарајућа КС под-Пуасонска, Пуасонска, односно над-Пуасонска, већ како се она односе према Пуасоновој расподели. Код ХО-1Д расподела фотона у КС $|z>$ је Пуасонска [43]:

$$p_n\equiv|<n|z>|^2=e^{-|z|^2}\frac{\left(|z|^2\right)^n}{n!} \tag{5.21}$$

а $|z|^2=<z|N|z>$ је средња вредност оператора броја честица (кванта) у КС $|z>$, па се на тај начин добија $g^{(2)}_{z;k}=1$.

Код ПХО ситуација је различита: БГ-КС су под-Пуасонска за мале вредности $|z|$ и Пуасонска за велике вредности $|z|$ [11], док су КП-КС и ГК-КС над-Пуасонска за било које вредности $|z|$, односно J.

У наставку, ради бољег прегледа и поређења, заједно дајемо изразе за дијагоналне елементе нормираног оператора густине (такозвана Хусимијева Q - функција), за све три врсте КС придружених ПХО (у редоследу у којем су и дефинисана: БГ-КС, КП-КС и ГК-КС):

$$<z,k|\rho_k|z,k>=\frac{1}{\bar{n}+1}\left(\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}\right)^{k-\frac{1}{2}}\frac{I_{2k-1}\left(2|z|\sqrt{\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}\right)}{I_{2k-1}(2|z|)} \tag{5.22}$$

$$<z,k|\rho_k|z,k>=\frac{1}{\bar{n}+1}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|z|^2\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}\right)^{2k}, \tag{5.23}$$

$$<J,\gamma;k|\rho_k|J,\gamma;k>=\frac{1}{\bar{n}+1}\frac{{}_1F_1\left(1;k+1;\frac{J}{2}\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)}{{}_1F_1\left(1;k+1;\frac{J}{2}\right)} \tag{5.24}$$

У истом редоследу, нормирана P - функција има следеће изразе:

$$P_k(|z|)=\frac{1}{\bar{n}}\left(\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}\right)^{k-\frac{1}{2}}\frac{K_{2k-1}\left(2|z|\sqrt{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}\right)}{K_{2k-1}(2|z|)} \tag{5.25}$$

$$P_k(|z|)=\frac{1}{\bar{n}}\left(\frac{1-|z|^2\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}{1-|z|^2}\right)^{2k-2}, \tag{5.26}$$

$$P_k(J)=\frac{1}{\bar{n}}\left(\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}\right)^k e^{-\frac{1}{\bar{n}}\frac{J}{2}} \tag{5.27}$$

Сви горњи изрази добијени су поступком изложеним у претходном поглављу. Помоћу добијених Q- и P- функција могу се изнаћи средње термалне вредности за ПХО квантни систем које смо у другом поглављу израчунали у репрезентацији координате. Међутим, како се може видети, рачунања у репрезентацији КС много су једноставнија и елегантнија.

6. Закључне примедбе

Потенцијал псеудохармонијског осцилатора (ПХО) је прелазни потенцијал између хармонијског и анхармонијских случајева. Пошто је потенцијал хармо-

нијског осцилатора (ХО), како у једнодимензионалном, тако и у тродимензионалном случају, идеалан потенцијал, који може служити као веома леп теоретски модел, али је његово одступање од експерименталних података у већини случајева прилично велик, модел ПХО, иако и он још далеко од експерименталних података, више се приближава реалним, анхармонијским потенцијалима.

Са друге стране, формализам кохерентних стања у многим се аспектима показао не само као интересантан, већ и користан модел.

Потенцијалу ПХО, са алгебарске тачке гледишта, одговара симетрија групе SU(1,1), што омогућава да се за овај потенцијал конструишу две врсте кохерентних стања: Барут-Гирарделова (БГ-КС, заснована на дефиницији која КС гледа као својствене векторе оператора снижења) и Клаудер-Переломова (КП-КС, која КС дефинише деловањем генералисаног оператора померања над основним стањем). У последње време, формулисан је и трећи вид дефиниције КС, такозвана Газо-Клаудерова кохерентна стања (ГК-КС, дефинисана по специфичним правилима). У стручној литератури ова последња врста КС није била формулисана за ПХО. Осим тога, у овом раду дали смо нов начин дефинисања ГК-КС, заснован на деловању експонецијалног Хамилтонијанског оператора над БГ-КС.

Ове три врсте КС придружених ПХО, разуме се, задовољавају све услове које се траже да их задовољи једно КС: услов нормирања, услов неортогоналности, услов континуитета у погледу главне променљиве, разлагање јединичног оператора по пројекторима КС, временску стабилност и акциони идентитет.

У раду смо доста пажње посветили миксованим стањима ПХО и то термалним стањима квантног идеалног гаса ПХО, који се налази у стању равнотеже са термостатом, дакле испуњава услове квантне каноничке расподеле. Изложили смо и метод изналажења неколико функција од изузетне важности за формализам КС, без којих се овај формализам не може користити: тежишну функцију која улази у састав интеграционе мере, матричне елементе оператора густине у репрезентацији КС (чији се дијагонални елементи називају Хусинијевом Q - функцијом), као и тежишну функцију дијагоналне репрезентације оператора густине (P - функција). Помоћу ових елемената могу се израчунати средње вредности извесног оператора A који карактерише квантни ПХО систем, како у чистом КС стању, тако и у миксованом (термалном стању).

Полазећи од ових општих поступака, у прегледу смо дали изразе ових функција за све три врсте КС придружених ПХО. Показало се да су рачунања у КС репрезентацији много једноставнија и елегантнија него у другим репрезентацијама (на пример, у репрезентацији координате, да не говоримо о репрезентацији импулса). Постоји један леп паралелизам у рачунањима када је реч о све три врсте КС придружених ПХО. Разуме се да тај паралелизам доводи до идентификације када се израчунавају разне средње термалне вредности, што је и за очекивати. У овом задњем случају, предност коришћења једне врсте КС у односу на другу одређује баш степен компликованости обављених рачунања.

У закључку, можемо рећи да коришћење формализма кохерентих стања у случају квантних система са псеудохармонијским потенцијалом има двојако значење: са једне стране проширује породицу потенцијала за који могу бити конструисана кохерентна стања и са којима се доста тога може израчунати, а са друге стране, имплицитно тим поступком, проширују се сазнања о псеудохармонијском осцилатору, као вези између хармонијског (идеалног) и анхармонијских (реалистичнијих) потенцијала. Да су и само ова два разлога у питању, сматрамо да вреди позабавити се псеудохармонијским осцилатором.

7. Литература

[1] Davidson, P. M. *Proc. R. Soc., 135*, (1932) 459

[2] Morse, P. M. , *Phys. Rev. 34*, (1929) 57

[3] Kratzer, A., *Zs. Phys. 3*, (1920) 289 – класично решење; Fues, E., *Ann. Phys. 80*, (1929) 367 – квантно решење.

[4] Pösch, G., Teller, E., *Zs. Phys. 83*, 143 (1933)

[5] Gol'dman, I. I. , Krivchenkov, V. D., Kogan, V. I., Galitskii, V. M., *Problems in Quantum Mechanics*, London, Infosearch, 1960

[6] Calogero, F., *J. Math. Phys. 12*, (1971) 419; Moser J., *Adv. Math. 16*, (1975) 1

[7] Camiz, P., Gerardi, A., Marchiro, C., Presutti, E., Scacciatelli, E., *J. Math. Phys. 12*, (1971) 2040; Dodonov, V. V., Malkin, I. A., Man'ko, V. I., *Phys. Lett. A 39*, (1972) 377; Dodonov, V. V., Malkin, I. A., Man'ko, V. I., *Nuovo Cim. B 24*, (1974) 46

[8] Sage, M., *Chem. Phys. 87*, (1984) 431; Sage, M., Goodisman M. J., *Am. J. Phys. 53*, (1985) 350

[9] Büyükkiliç F., Demirhan D., Özeren S. F. , Chem. *Phys. Lett. 194*, (1992) 9; Büyükkiliç, F., Eğrifes, H., Demirhan, D., *Theor. Chem. Acc. 98*, (1997) 192

[10] Dodonov, V. V., Man'ko, V. I., Rosa, L., *Phys. Rev. A 57*, (1998) 2851

[11] Popov, D., *J. Phys. A: Math. Gen. 34*, (2001) 5283

[12] De Alfaro, V., Fubini, S., Furlan, G., *Nuovo Cim. A 34*, (1976) 369

[13] Wang, L. Y., Gu X. Y., Ma Z. Q., Dong S. H., *Found. Phys. Lett. 15*, (2002) 569

[14] Gönül, B., Özer, O., Koçak, M., Tutku, D., Cançelik, Y., *J. Phys. A: Math. Gen. 34*, (2001) 8271; Gönül, B., Özer, O., Koçak, M., Tutku, D., Cançelik, Y., *arXiv: quant-ph/0106142 v3* (2002)

[15] De Lima Rodrigues, R., De Lima, A. F., De Araújo Ferreira, K., Vaidya a. N., *arXiv: hep-th/0205175 v7* (2002)

[16] Govindarajan, T. R., Sunneta, V., Vaidya, S., *Nucl. Phys. B 583*, (2000) 291
[17] Martinis, M., Mikuta, V., *arXiv: quant-ph/0211118 v2* (2002)
[18] Rosu, H. C., Castro, C., *Phys. Lett. A 264*, (2000) 350
[19] Popov, D., *Acta Phys. Slovaca 45*, (1995) 557
[20] Bloch, F., *Z. Phys. 74*, (1932) 295
[21] Messiah, A., *Mécanique quantique*, Tome I, Dunod, Paris, 1969
[22] Schwinger, J., *Phys. Rev. 82*, (1951) 664
[23] Chetouani, L., Guechi, L., Hammann, T. F. , Czech, J. *J. Phys. 43*, (1993) 13
[24] Popov D., Czech, J., *J. Phys., 49*, (1999) 145
[25] Gradshtein, I. S., Ryshyk, I. M., *Table of Integrals, Series and Products,* Academic Press, London, New York, 1980
[26] Mitrinović, D. S., *Specijalne funkcije*, Naučna knjiga, Beograd, 1986
[27] Popov, D., *Int. J. Quant. Chem., 69*, (1998) 159
[28] Popov, D., *J. Res. Phys., 29*, (2002) 51
[29] Glauber, R. J., *Phys. Rev. 130*, (1963) 2529; *131*, (1963) 2766; Sudarshan, E. C. G., *Phys. Rev. Lett. 10*, (1963) 277; Klauder, J. R., *J. Math. Phys. 4*, (1963) 1058; Klauder J. R., Skagerstam B. –S., *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1985
[30] Nieto, M. M., Simmons, Jr., L. M., *Phys. Rev. D 20*, (1979) 1321, 1332, 1342
[31] Perelomov, A. M., *Theor. Math. Phys. 6*, (1971) 156, *reprinted*: *arXiv: math-ph/0210005 v1* (2002); Perelomov, A. M., *Commun. Math. Phys. 26*, (1972) 222, *reprinted*: *arXiv: math-ph/0203002 v1* (2002); Perelomov, A. M., *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer, Berlin, 1986
[32] Dodonov, V. V., *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 4, R1* (2003)
[33] Sixdeniers, J.-M., Penson, K. A., Solomon, A. I., *J. Phys. A: Math. Gen. 32*, (1999) 7543
[34] Antoine, J.-P., Gazeau, J.-P., Monceau, P., Klauder, J. R., Penson, K. A., *J. Math. Phys. 42*, (2001) 2349
[35] Quesne C., *arXiv: quant-ph/0108125 v1* (2001)
[36] Mathai, A. M., Saxena, R. K., *Lecture Notes in Mathematics*, *348*: Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences, Springer, Berlin, 1973
[37] Akhiezer, N. I., *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Oliver and Boyd, London, 1965
[38] Brif , C., Vourdas, A., Mann A., *J. Phys. A: Math. Gen. 29*, (1996) 5873
[39] Appl, T., Schiller, D. H., *arXiv: quant-ph/0308013 v1* (2003)
[40] Popov, D., Dong, S. H., *Int. J. Mod. Phys. E* (submitted)
[41] Sudarshan, E. C. G., *Phys. Rev. Lett. 10*, (1963) 277
[42] Popov, D., *J. Phys. A: Math. Gen. 35*, (2002) 7205
[43] Walls, D. F., Milburn, G. J., *Quantum Optics*, Springer, Berlin, 1994
[44] Cooper, I. L., *J. Phys. A: Math. Gen. 26*, (1993) 1601

Abstract

PSEUDOHARMONIC OSCILLATOR AND ASSOCIATED COHERENT STATES

Dusan Popov
University „Politehnica" of Timisoara, Department of Physics, Timisoara, Romania
E-mail: dpopov@etv.utt.ro

In the paper we have examined the pseudoharmonic oscillator (PHO) potential, which is an intermediate potential between the harmonic oscillator (HO), an ideal potential, and the anharmonic ones (the more realistic potentials), with the applications in many branches of physics. We have presented the generally approach of the construction of the coherent states (CS) and we have indicated some properties of these states, in order to obtain the weight function of the integration measure, the diagonal elements of the density operators in CS-representation of mixed (thermal) states (the Husimi's *Q*-function) and, also, the *P*-function from the diagonal expansion of the density operator. We have constructed the Barut-Girardello, Klauder-Perelomov and Gazeau-Klauder coherent states associated with the PHO and we have examined some properties of these states, particularly calculating the thermal expectation values.

Keywords: pseudoharmonic oscillator; coherent states; density operator PACS: 03.65. –w ; 42.50. –p

Аутор

Попов, Душан Ј., дипл. физичар, доктор наука, Ванредни професор Универзитета „Политехника", Темишвар, Румунија
University „Politehnica" Timisoara, Department of Physics
Piata Regina Maria No. 1, 300004 Timisoara, Romania
Tel: +40 256 304093, E-mail: dusan_popov@yahoo.co.uk
dpopov@etv.utt.ro